Zusammenfassung

① Grenzwert einer Folge, falls existiert, ist eindeutig bestimmt.

② $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\Longrightarrow A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

③ Die arithmetische Operationen sind mit Konvergenz verträglich.

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit

$\lim a_n = a$ $\lim b_n = b$

(i) Dann $(a_n \pm b_n)$ konvergiert mit $\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$

(ii) $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim a_n b_n = ab$

(iii) Falls $b_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$ und $b \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert a/b.

(iv) Falls es ein $K \geq 1$ gibt mit $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq K$ dann folgt $a \leq b$.

Bsp. ① Konstante Folge $a_n = a$ $\forall n \geq 1$ ist konvergent, $\lim a_n = a$

② $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^b = 1$, $b \in \mathbb{Z}$.

③ $\lim \frac{n}{n+1} = 1$

④ $a_n = (-1)^n$ ist divergent

⑤ $a_n = n$ ist divergent

Einschliessung Kriterium (Sandwich thm)

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $\lim a_n = \lim b_n = L \in \mathbb{R}$

Ist $K \in \mathbb{N}$ und ist $(c_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n \geq K$. Dann konvergiert (c_n) und $\lim c_n = L$.

Defn Man sagt eine Folge (a_n) divergiert gegen $+\infty$, falls es zu jedem $T>0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so dass $a_n > T$

$\forall n \geq n_0$ gilt.

Sie divergiert gegen $-\infty$ falls $(-a_n)_{n\geq 1}$ gegen $+\infty$ divergiert.

Bmk. Man sagt manchmal auch "Eine Folge konvergiert gegen $+\infty$" wenn man Divergenz gegen $+\infty$ meint.

§ 2.2. Der Satz von Weierstrass und Anwendungen.

Defn ① $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monotone wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$

$\forall n \geq 1$, $\left((a_n) \nearrow \right)$

(oder $\forall n > K$)

② $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monotone fallend

falls $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$.

$(\forall n > K)$.

$(a_n) \searrow$.

③ (a_n) heisst monotone falls ist sie monotone fallend oder monotone wachsend

** Satz (Weierstrass oder Monotone Konvergenz Satz)

① Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert

$$\lim a_n = \sup\{a_n : n\geq 1\}.$$

② Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert (a_n) mit Grenzwert

$$\lim a_n = \inf\{a_n : n\geq 1\}$$

Beweis ① Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt

$$S := \sup\{a_n : n\geq 1\}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

Da S die kleinste Oberschranke ist, ist $S-\varepsilon$ ~~ist~~ kein Oberschr.

d.h. es gibt N s.d.

$$a_N > S-\varepsilon$$

Woraus folgt dass $\forall n \geq N$

$$\boxed{S-\varepsilon} < a_N \leq \boxed{a_n} \leq S < \boxed{S+\varepsilon}$$

Da $(a_n) \nearrow$ und $n > N$. $\Rightarrow |a_n - S| < \varepsilon$ $\forall n > N$.

Wir werden mittels Mon Konv Satz

die folgende Grenzwerte bestimmen

① $\lim\limits_{n\to\infty} n^b q^n = 0$ für $b \in \mathbb{Z}$, $0 \le q < 1$

② Insbesondere

$\lim q^n = 0$

für $0 \le q < 1$

z.B. $\lim \frac{1}{2^n} = 0$

$q = \frac{1}{2} < 1$

③ $n^{1/n} \to 1$

④ $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert

Grenzwert "e"

Bsp. Sei $b \in \mathbb{Z}$

$0 \le q < 1$

Dann gilt $\lim n^b q^n = 0.$

Beweis wir nehmen an

dass $q > 0$ ($q = 0$ ist klar).

Erinnerung: $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^b = 1$

$\forall b \in \mathbb{Z}$.

Behauptung: a_n ist mon. fallend!

Beweis (Behauptung)

$$a_{n+1} = (n+1)^b \cdot q^{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)^b}{n^b} \cdot n^b \cdot q^n \cdot q$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^b q \cdot a_n.$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b \cdot q}\cdot a_n.$$

Da $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^b = 1$,

gibt es ein N_0 s.d

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^b - 1\right) < \frac{1}{q} - 1$$

$$\forall n > N_0$$

(Wir nehmen $\varepsilon = \frac{1}{q} - 1 > 0$

d.h $\forall n > N_0$

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^b \cdot q \cdot a_n$$

$$< \frac{1}{q} \cdot q \cdot a_n = a_n.$$

Da $a_n > 0$ $\forall n$

$(a_n)_{n\geq 1}$ ist nach unten beschränkt

Nach mon. konv satz

$\lim a_n$ existiert!

Sei $\ell = \lim a_n = \lim a_{n+1}$

(Was die Folgenglieder am Anfang machen ist nicht wichtig für die Konvergenz der Folge.)

$$a_{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b}\ \underbrace{q}\ \underbrace{a_n}.$$

$$\underbrace{\lim a_{n+1}}_{\ell} = \underbrace{\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^b\right)}_{1} \cdot q \cdot \underbrace{(\lim a_n)}_{\ell}$$

$$\ell = 1\, q\, \ell.$$

$\ell - q\ell = 0$

$(1-q)\ell = 0 \qquad q<1$

$\Rightarrow \ell = 0.$

$$\boxed{\lim a_n = \ell}$$

Bmk. ① $\boxed{\lim n^b q^n = 0}$

$q = \frac{1}{r}, \quad r>1$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{r^n} = 0}$$

Exponential Funktion r^n, mit $r>1$ wächst schneller als jede Potenz n^b

② Insbesondere für $q<1$

$\lim q^n = 0$

Defn Die Folge $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$ heisst Geometrische Folge

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall n.$

$(a_n) = (q, q^2, q^3 \ldots)$.

Bsp. $a_n = \sqrt[n]{n}$

$= n^{1/n} \longrightarrow 1$

Beweis z.z $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$|n^{1/n} - 1| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0$$

d.h $\underline{1-\varepsilon < n^{1/n}} < \varepsilon + 1$

(i) $n^{1/n} \geq 1 > 1 - \varepsilon$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots + b^{n-1})}.$$

$a = n^{1/n}$ $b = 1$

$$\underbrace{(n-1)}_{>0} = (n^{1/n} - 1) \underbrace{(n^{\frac{n-1}{2}} + \dots + 1)}_{\geq 1}.$$

Falls $n > 1$

$\Longrightarrow n^{1/n} - 1 \geq 0$.

$n^{1/n} \geq 1 > 1 - \varepsilon$

(ii) z.z. für jedes $\varepsilon > 0$

$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d $n^{1/n} < \varepsilon + 1$

$\forall n \geq N_0$

$$\boxed{\lim n^b q^n = 0}\ (*).$$

Wir wenden (*) an

mit $b = 1$ $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$

Dann erhalten wir $\lim \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$

d.h. $\forall \delta > 0$, $\exists$ N s.t.

$$\left| \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} - 0 \right| < \delta \quad \forall n > N$$

Insbesondere $\delta = 1$

Dann erhalten wir

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \quad \forall n > N$$

$$n < (1+\varepsilon)^n \quad \forall n > N.$$

$$n^{1/n} < (1+\varepsilon)$$

Wichtige Bsp

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert.

Nennen wir den Grenzwert "e"

$e \cong 2.718 \ldots$

Lemma (Bernoulli Ungleichung)

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis Induktion.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$$

$$\underset{\text{induktive hyp}}{\geq} (1+x)(1+nx)$$

$$= 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + x + nx$$

$$= 1 + (n+1)x$$

Sei $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$

Behauptung b_n ist mon. fallend

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right).$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \left(1+\underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{x}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\geq \left(1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Bernoulli Ungleichg.

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$n^2-1 < n^2$

$\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= 1$$

$\Rightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1 \Rightarrow b_{n-1} \geq b_n$

b_n ist mon. fallend

(2) b_n ist auch nach unten beschränkt

$b_1 = 2^2 \geq b_2 \geq b_3 \; . \; . \; . \; .$

$b_1 = 4 \geq b_n \quad \forall n \geq 1$

Nach mon. Konv- Satz

$\lim b_n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ existiert

$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$

$b_n = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\lim b_n =: l \qquad \lim 1+\frac{1}{n} = 1$

/10

$$\lim b_n = \lim a_n \underbrace{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=1}$$

$$\lim a_n = \frac{\lim b_n}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert.

$$2.718\ldots = e.$$

<u>Frage</u>: Was ist eigentlich e?

Nehmen wir an dass ich 1 CHF habe. und die Bank mir 100% Zinsen in einem Jahr gibt.

Nach 1 Jahr habe ich $(1+1) = 2$ CHF.

Wenn die Zinsen zweimal im Jahr aufgezinst werden habe ich, $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$ CHF täglich $= \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$

$= 2.714$

Stündlich $: \left(1+\frac{1}{365\times 24}\right)^{365\times 24}$

$= 2.7181$

$\vdots$

Es gibt eine natürliche Grenz dafür wie viel Geld ich verdienen kann.

<u>Bsp.</u> Sei $c>1$

Sei a_n rekursiv definiert Folge

$$a_1 = c$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right),\ n\geq 1.$$

<u>Bmk</u> Dies ist ein wichtiger Bsp. wir werden sehen ~~dass~~ wie man aus der Existenz des Limes, auch dessen wert manchmal schliessen kann.

Wir nehmen an dass der Grenzwert existiert

$$\lim a_n = A \neq 0$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

$$\lim a_{n+1} = A = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \frac{c}{\lim a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(A + \frac{c}{A}\right)$$

$$2A = A + \frac{c}{A} \Rightarrow A = \frac{c}{A}$$

$$\Rightarrow A^2 = c.$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{c}$$

Clicker

Seien a_n, b_n, c_n drei Folgen so dass $\forall n \geq 1$

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

- Falls $\lim a_n = \lim b_n = 1$, dann konvergiert c_n und $\lim c_n = 1$

✓ Sandwich Satz

- Falls $\lim a_n = 1$, $\lim b_n = 2$, dann konvergiert c_n und $1 \leq \lim c_n \leq 2$

✗ Sei $c_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 2 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Dann $1 \leq c_n \leq 2$, und c_n divergiert

- $\lim a_n = 1$, $\lim b_n = 2$, dann divergiert c_n

✗ Sei $c_n = 2$ $\forall n$

- Falls $\lim a_n = 1$, $\lim b_n = 2$ dann kann man nichts über die Konvergenz von c_n sagen

✓ ~~Siehe~~ die beiden obigen Bsp.